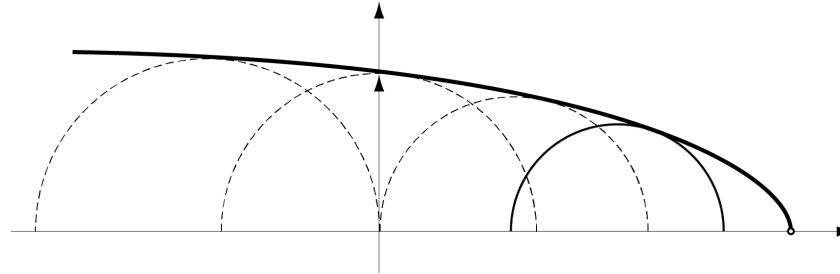


Mécanique des structures

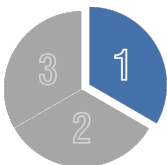


Chapitre 15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Pr. Shea & Dr Preneloup

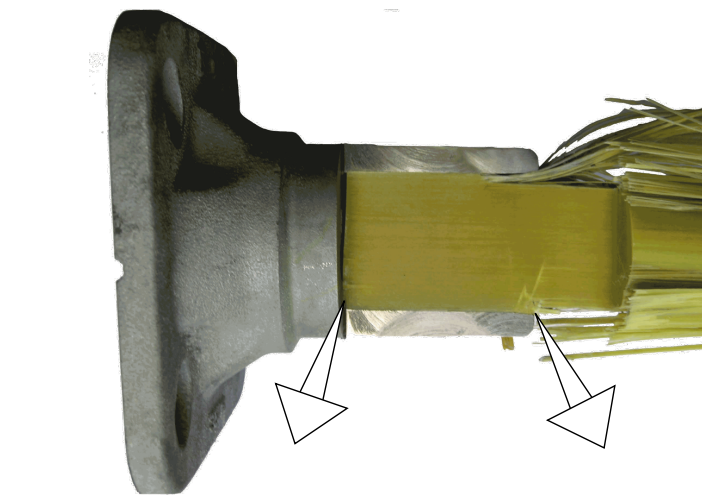
SGM BA3 2025-2026

EPFL

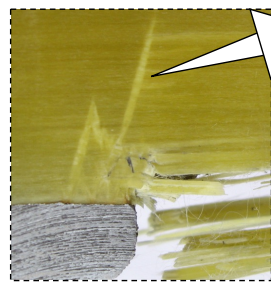


Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

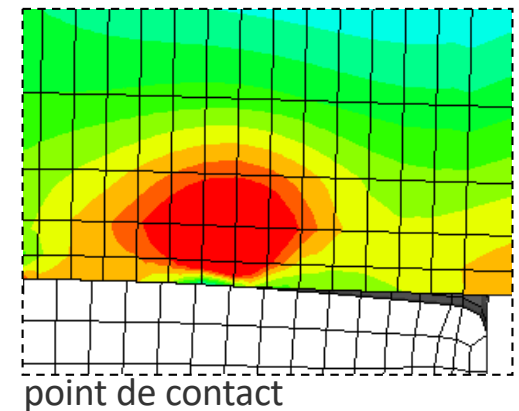
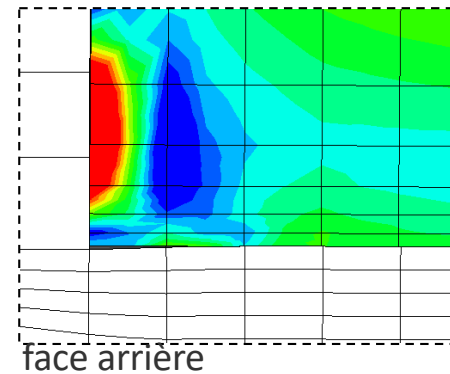
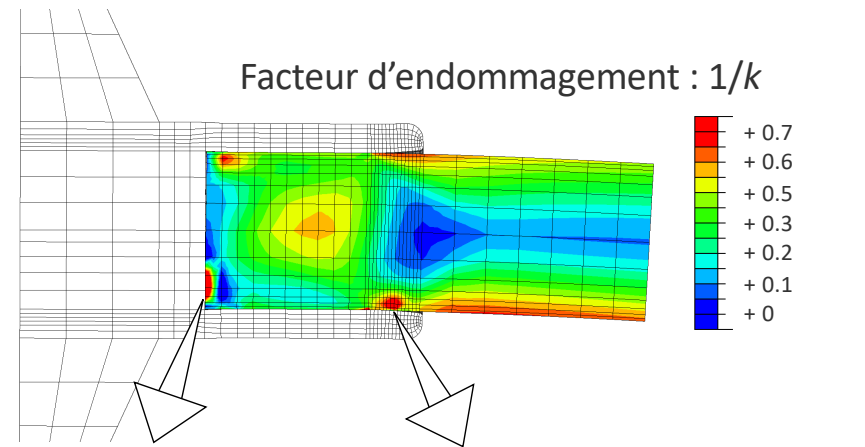
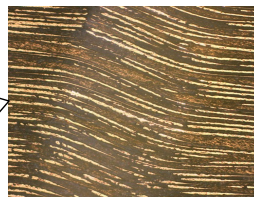
Exemple



fissures transverses

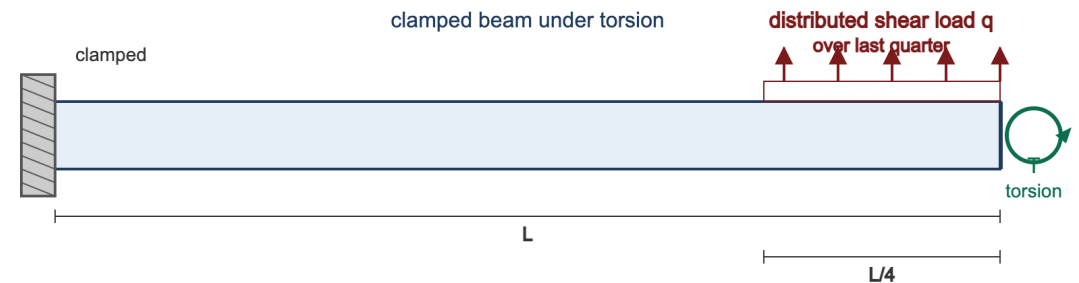


micro-flambage



Défi: passer d'un **test de traction uniaxial** (traction, compression ou torsion) à un **critère de rupture pour un cas complexe (réel)**

- Cas complexe: charge "complexe"



- Cas complexe: concentration de contraintes

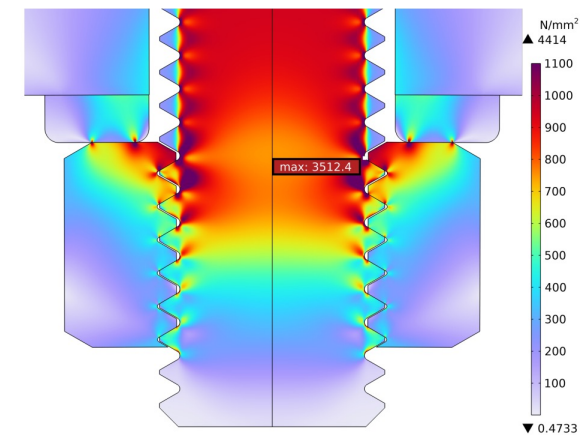
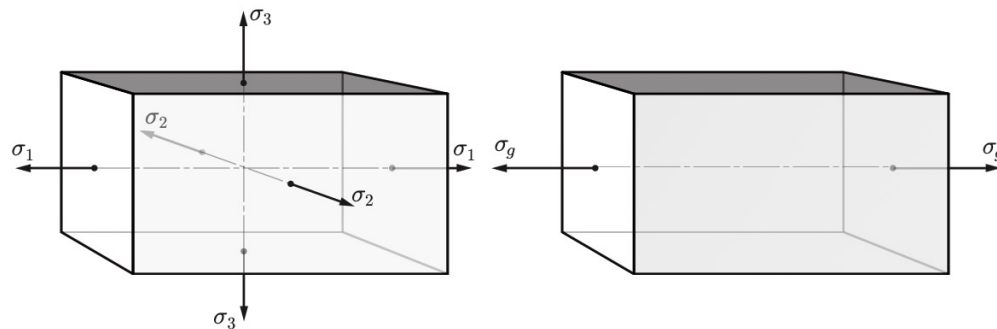
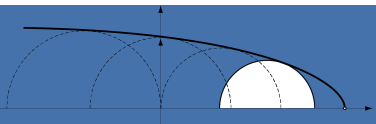


Figure 8. Linear elastic calculation; $F_{\text{preload}} = 75 \text{ kN}$; equivalent stress according to von Mises

- Cas simple: traction



Facteur de sécurité: $n = \sigma_e / \sigma_g$



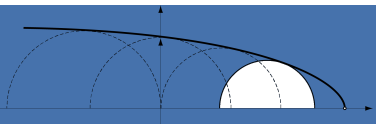
Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Introduction

Un des objectifs de la mécanique des structures est d'évaluer un **critère fiable** qui **détermine quand une structure pourrait être défaillante.**

- Les critères de rupture, tel que **von Mises, permettent d'identifier les zones et les amplitudes** pour lesquels l'intégrité de la structure n'est plus garantie.
- Les logiciels d'éléments fini (FEM) permettent une localisation et une évaluation efficace des zones à risque.
- L'**interprétation des résultats numériques** est primordiale pour en comprendre les raisons et proposer une optimisation/renforcement efficace de la structure.

Ici, que des matériaux isotropes



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Notions générales

Après avoir déterminé le champ des contraintes dans une pièce, *l'ingénieur* doit encore calculer la **sécurité** de cette pièce, compte tenu de la résistance limite du matériau utilisé.

La notion de sécurité n'est pas aisée à définir car cette **résistance limite dépend** non seulement de **l'intensité des contraintes**, mais encore de leur **variation dans le temps** (contraintes statiques ou cycliques, chocs, ...), ainsi que de la **température** et du temps (fluage). Voir d'autre facteur.

Nous appellerons rupture aussi bien la rupture effective d'un matériau fragile que le dépassement de la limite élastique d'un matériau ductile.



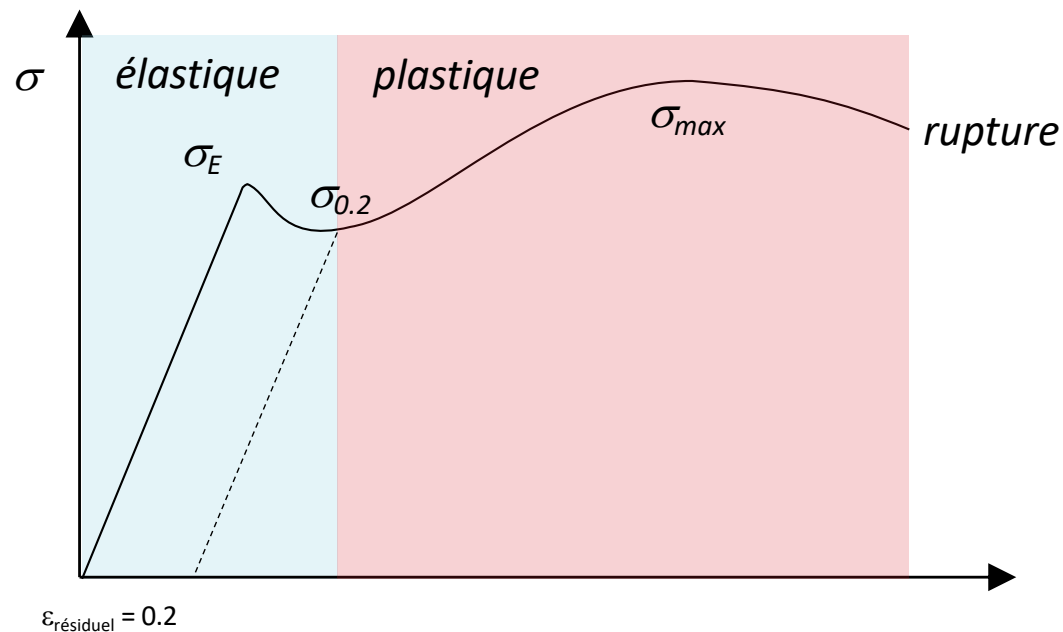
Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

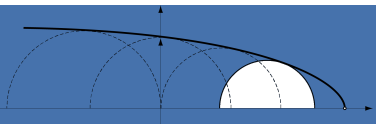
Introduction

Dans le cadre de ce cours nous avons considéré des déformations dans le domaine linéaire élastique. Nous prendrons comme critère de défaillance (ou de rupture) la limite élastique.

On définit le **facteur de sécurité** n comme le rapport entre contrainte limite élastique σ_E et la contrainte maximum prévue σ_{max} .

$$n = \frac{\sigma_E}{\sigma_{max}}$$



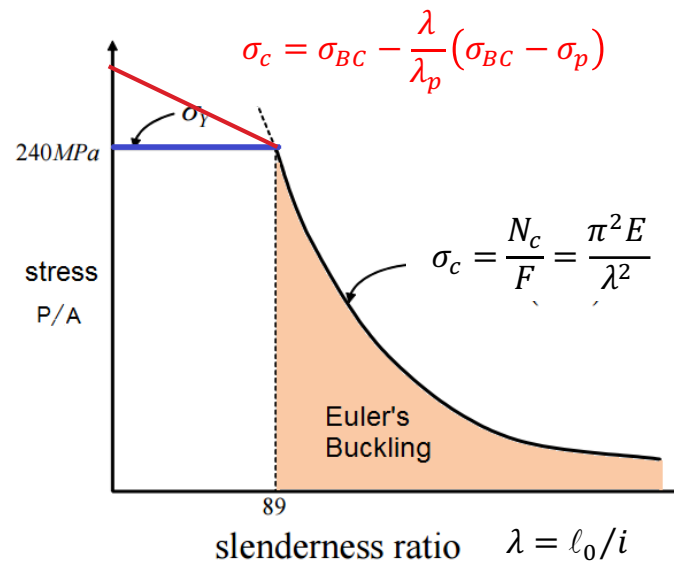


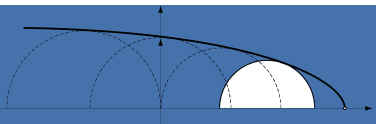
Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Introduction

Contre-exemple:

Au chapitre 12, nous avons introduit la notion de **flambage**: un **effondrement de la structure apparaissant pour des contraintes très inférieures à la limite élastique**. $\sigma_c \ll \sigma_e$

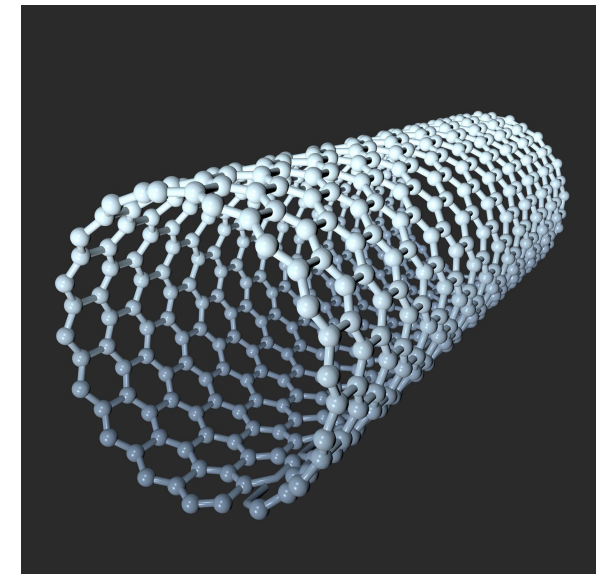




Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Introduction

- La **résistance à la fracture** d'un matériau élastique fragile dépend de la force des liaisons intermoléculaires
- En théorie simple, la résistance à la fracture est de l'ordre de: $10^{-1} * \text{Energie liaison}$
- Dans la pratique, la résistance à la fracture est de l'ordre de: 10^{-2} à $10^{-4} * \text{Energie liaison}$
- **Pourquoi?** Plusieurs raisons, entre autres:
 - Matériaux ductiles: mouvement de dislocations, déformation plastique
 - Matériaux fragiles: concentration de contraintes à des micro-fissures

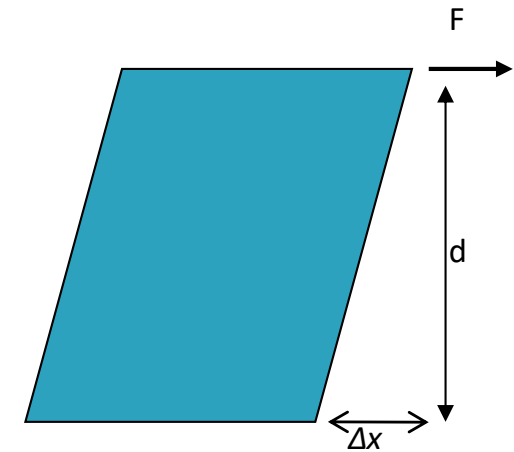


<https://www.britannica.com/science/carbon-nanotube>

Goal: starting with the elastic shear properties,
estimate when plastic deformation begins.
i.e. Go from G (shear modulus) to $\sigma_{\text{crit_plastic}}$

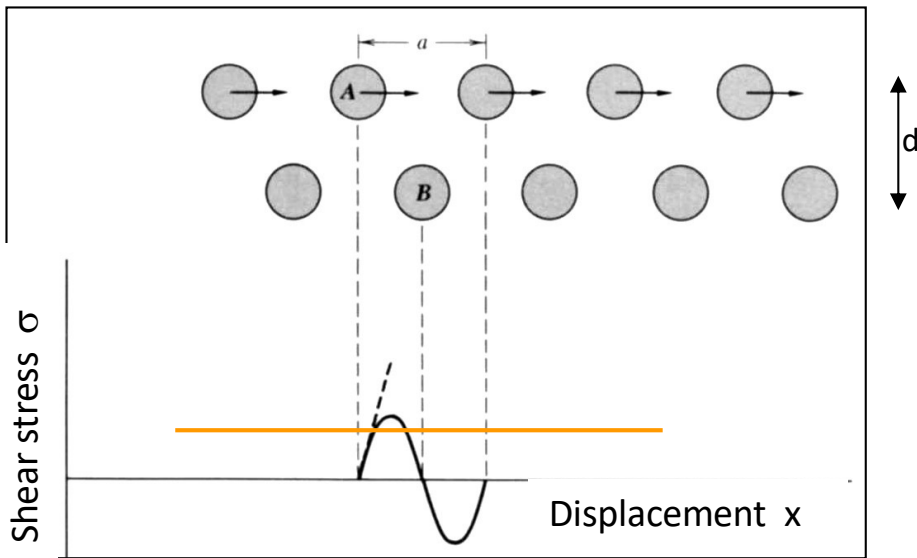
Consider a perfect crystal. **Estimate the shear strength
based on shear modulus G**

$$\sigma_{\text{shear}} = G \frac{\Delta x}{d}$$



$$E = 2G(1+\nu)$$

See C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, chapter 20



$$\sigma_{shear} = G \frac{\Delta x}{d} \quad \text{d: interplanar spacing}$$

$$\sigma = \left(\frac{Ga}{2\pi d} \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{a} \right)$$

$$\sigma_{critical} = \frac{Ga}{2\pi d} \quad a \approx d$$

$$\sigma_{critical} = \frac{G}{2\pi} \approx \frac{G}{6}$$

If do a full correct calculation, one finds

$$\sigma_{critical} \approx \frac{G}{30}$$

i.e., shear strain angle of 2 degrees

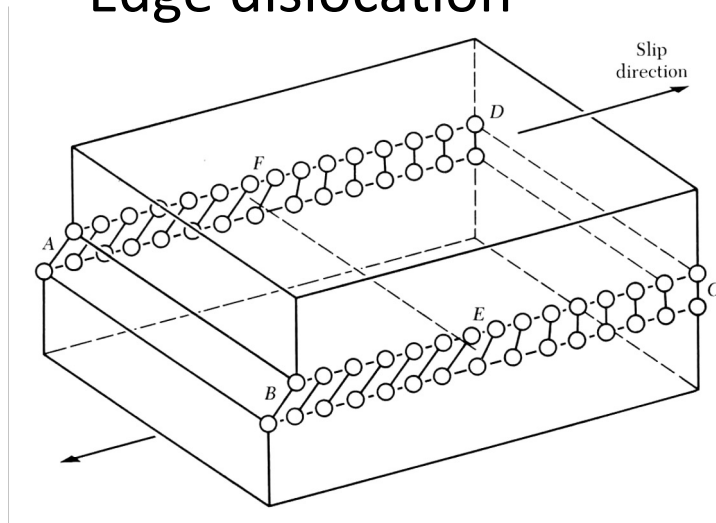
Material	G (Pa)	Measured $\sigma_{critical}$ (Pa)	G / σ_{crit}
Sn, single crystal	1.9×10^{10}	1.2×10^6	15,000
Al, single crystal	2.5×10^{10}	4.0×10^5	60,000
Al, poly-crystal	2.5×10^{10}	2.6×10^7	900
Al, commercial	2.5×10^{10}	9.9×10^7	250
Duralumin	2.5×10^{10}	3.6×10^8	70
Fe, poly crystal	7.7×10^{10}	1.5×10^8	500
Ni-Cr steel	8.0×10^{10}	1.2×10^9	65

What makes single crystal materials have such low shear strength??

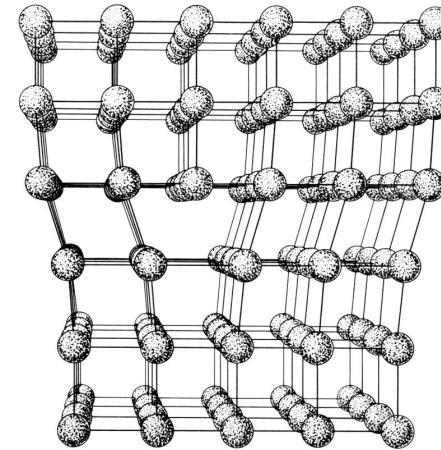
$$\frac{G}{\sigma_{critical}} \approx 30$$

▶ Two main types of dislocations

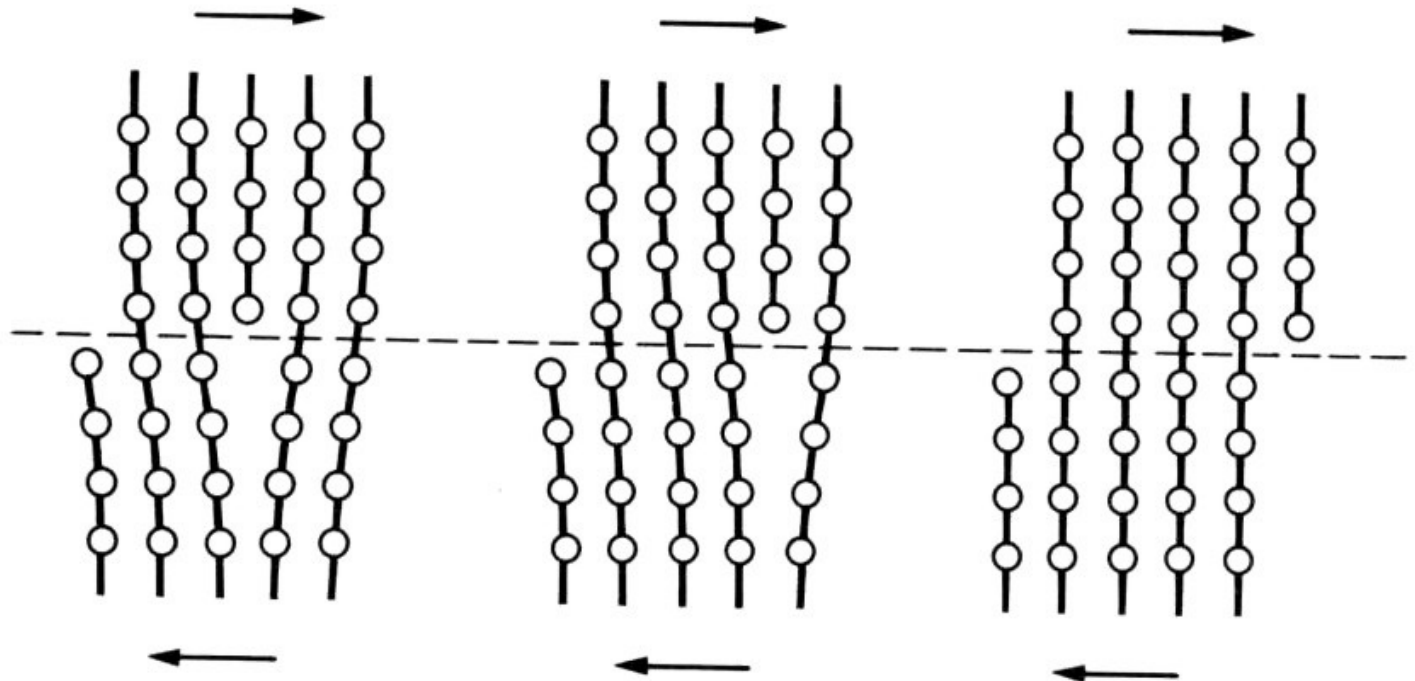
-Edge dislocation

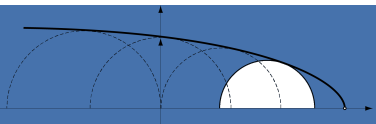


-Screw dislocation



- ▶ Force to move a dislocation is very low, approx 10 kPa for ductile materials
- ▶ Dislocations can make a crystal very plastic

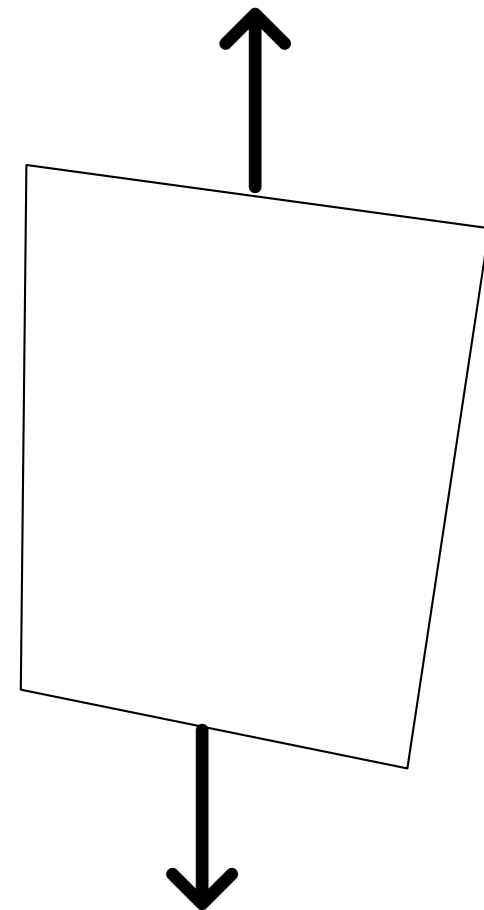
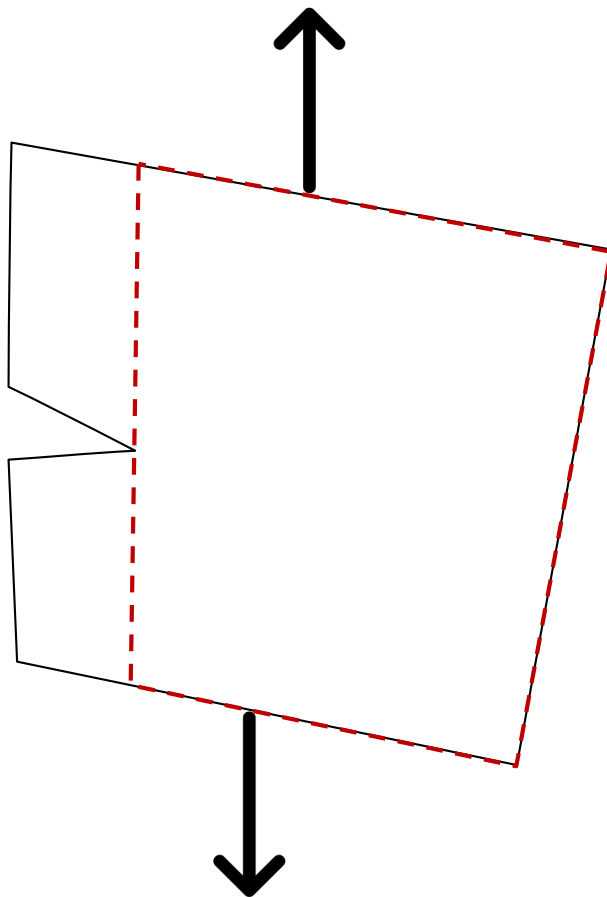




Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

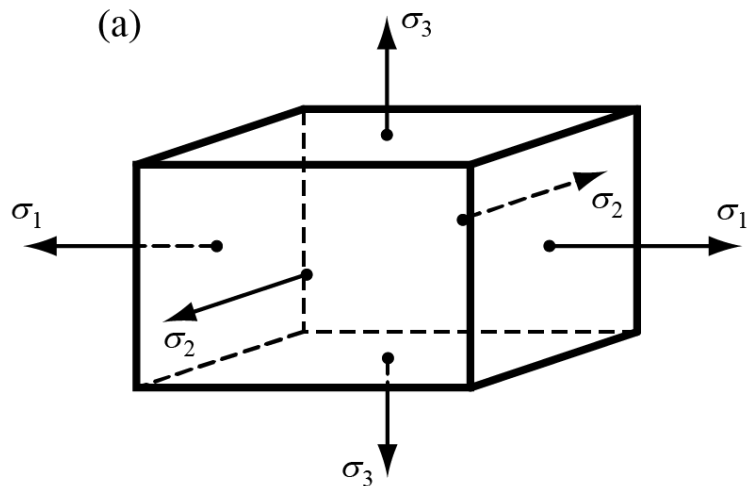
Introduction

- La résistance à la fracture est fortement déterminée par les défauts dans le matériau (dislocations dans le cristal, microfissures, impuretés) qui mènent à la **concentration de contrainte**.
- C'est aussi le domaine de la mécanique de la rupture (*fracture mechanics*).



Considérons un élément de matière soumis aux contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 .

On appelle **état limite de contrainte** toute combinaison $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ provoquant le dépassement de la limite élastique dans l'élément

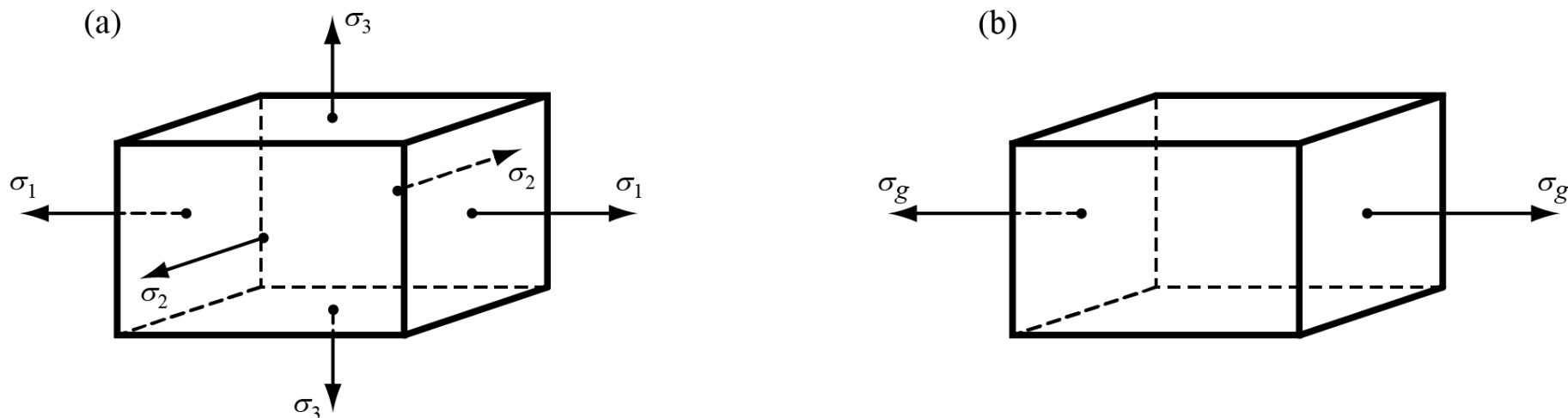


La physique du solide est incapable de prévoir exactement quand une combinaison des contraintes devient un état limite.

Ceci n'est possible que pour certains cristaux parfaits et quelques combinaisons très particulières des contraintes. Il faudrait une infinité d'essais pour déterminer les combinaison et l'intensité des contraintes jusqu'à la rupture.

Considérons un élément de matière soumis aux contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 .

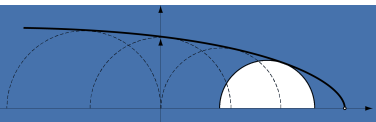
On appelle **état limite de contrainte** toute combinaison $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ provoquant le dépassement de la limite élastique dans l'élément.



A partir d'un état non-limite $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, opérons une homothétie du tenseur des contraintes en multipliant chaque contrainte par un nombre n . La plus petite valeur de n pour laquelle $(n \sigma_1, n \sigma_2, n \sigma_3)$ est un état limite est appelée **coefficient de sécurité**.

Cet état de contrainte présente un coefficient de sécurité caractérisé par la **contrainte de comparaison** ou la **contrainte équivalente de traction simple** σ_g

Coefficient de sécurité: $n = \sigma_e / \sigma_g$



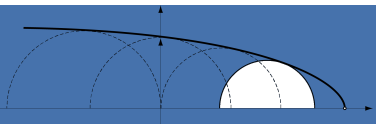
Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Coefficient de sécurité n

Coefficient de sécurité: $n = \frac{\sigma_e}{\sigma_g}$

Conditions de Conception	Facteur de Sécurité
Matériaux fiables, charges bien connues	1.3 à 1.5
Matériaux courants, conditions environnementales non sévères.	1.5 à 2.5
Matériaux peu fiables ou fragiles , conditions environnementales difficiles (corrosion, fatigue).	3.0 à 4.0

Voir les méthodes plus rigoureuses et complètes: **LRFD** (Load and Resistance Factor Design) ou **ECA** (Engineering Critical Assessment)



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

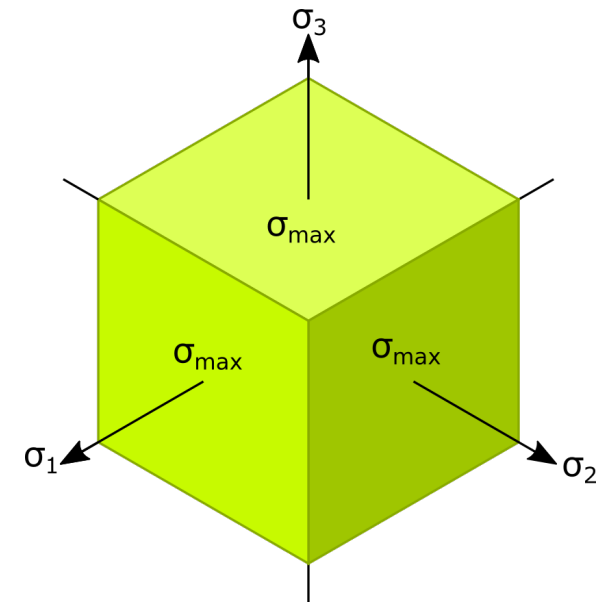
Coefficient de sécurité n

Application ou Composant	Coefficient de Sécurité n Typique	
Aéronautique et Aérospatiale	1.25 à 1.5	Priorité au faible poids . Des analyses approfondies et des contrôles de qualité stricts compensent le faible n
Bâtiments (Acier Structurel)	1.5 à 2.5	Charges bien comprises et structures souvent redondantes .
Ponts et Ouvrages d'Art	2 à 3	Charges variables (trafic, vent). Conséquences de défaillance plus importantes que pour un bâtiment standard.
Récipients sous Pression (Chaudières, Réservoirs)	3.5 à 6	Risque de défaillance catastrophique impliquant des fluides dangereux, des pressions élevées et des contraintes thermiques/de fatigue.
Pièces Moulées en Fonte (Ex: Roues)	8 à 20	La fonte est un matériau fragile dont les propriétés sont très sensibles aux défauts de fabrication (porosité, inclusions).
Éléments de Levage (Crochets, Câbles)	8 à 10	Risque pour la vie humaine et nature dynamique et soudaine de la charge. Une défaillance est immédiate et catastrophique.
Arbres de Transmission (Haute Charge/Choc)	10 à 12	Nécessité d'absorber des chocs, des vibrations et de la fatigue dans des environnements mécaniques exigeants.
Composants d'un Moteur (Pièces Statiques)	6 à 8	Environnement sévère (température, vibrations) et importance critique du composant dans le système global.

Modèle le plus simple: Principal Stress Theory

La rupture survient lorsque l'une des contraintes principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) dépasse la contrainte limite élastique σ_e

- Ce modèle fonctionne bien pour les matériaux fragiles (par exemple silicium, fonte, céramique), où la rupture est dominée par des contraintes normales et non par l'écoulement ou la plasticité
- Il n'est pas adapté aux matériaux ductiles, où la contrainte de cisaillement (distorsion) régit la déformation.



Modèle simple 2. Strain Energy Theory

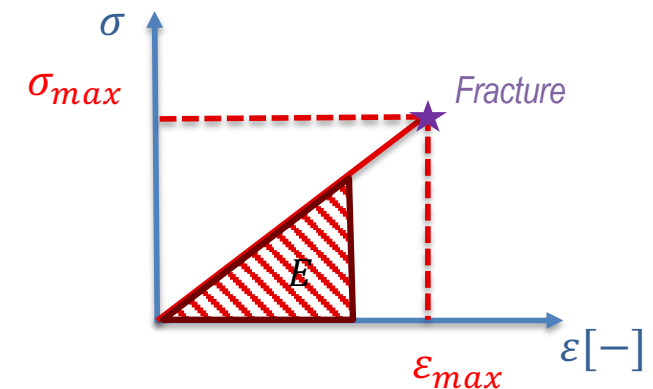
- Rupture si l'énergie de déformation (dans le cas réel complexe) est supérieure à l'énergie de déformation à la rupture dans test uniaxial

- Cas uniaxial:
$$E_{lim,uniaxial} = \frac{1}{2} \sigma_e \varepsilon_{max} = \frac{\sigma_e^2}{2Y}$$

- Cas général:
$$E = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{Y} - \frac{\nu}{Y} (\sigma_2 + \sigma_3) \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{Y} - \frac{\nu}{Y} (\sigma_3 + \sigma_1) \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{Y} - \frac{\nu}{Y} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$E = \frac{1}{2Y} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3)]$$



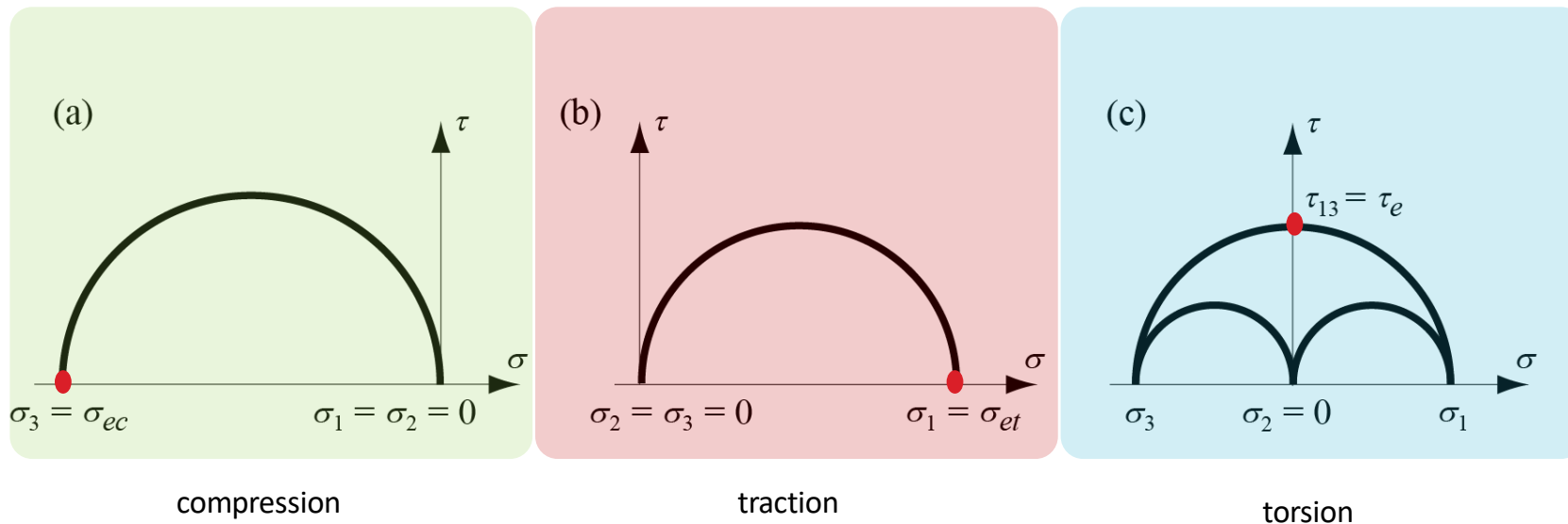
- Rupture si:
$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3) > \sigma_e^2$$

Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Notions générales

Les théories de la rupture, basées sur certains *critères de rupture* de l'équilibre élastique, ont pour **but de permettre la prévision d'un état limite sur la base d'un petit nombre d'essais ou même d'un seul essai.**

Rappelons que les essais classiques des matériaux sont la **traction**, la **compression** et la **torsion**.

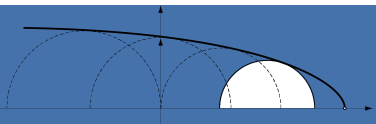


Les critères – ou hypothèses – de rupture de l'équilibre élastique sont nombreux. Nous étudierons ici les trois les plus connus : critères de :

- *Mohr-Coulomb*
- *Tresca*
- *von Mises*

Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Caractéristique	Critère de Mohr-Coulomb (Matériaux Fragiles)	Critère de Tresca (Cisaillement Max)	Critère de Von Mises (Énergie de Distorsion)
Matériaux Ciblé	Fragiles (Sols, Roches, Béton)	Ductiles (Métaux)	Ductiles (Métaux, meilleure précision)
Base Physique	La rupture dépend de la combinaison de la contrainte normale et de la contrainte de cisaillement sur le plan de rupture.	La déformation plastique survient lorsque la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} atteint une valeur critique.	La déformation plastique survient lorsque l' énergie de distorsion u_d atteint une valeur critique.
Mécanisme de Rupture	Rupture par cisaillement (glissement ou arrachement).	Début de la plasticité .	Début de la plasticité .
Équation de Référence	$\sigma_g = \sigma_1 - \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}} \sigma_3$	$\sigma_g = \max(\sigma_1 - \sigma_2 , \sigma_2 - \sigma_3 , \sigma_3 - \sigma_1)$	$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$
Surface de Rupture	Prisme hexagonal irrégulier	Prisme hexagonal régulier	Cylindre circulaire
Facteur Clé	Résistance à la compression vs. Tension, Angle de frottement interne et Cohésion	Contrainte de cisaillement maximale.	Contrainte équivalente moyenne.
Hypothèse Hydrostatique	Dépend de la pression hydrostatique (la pression moyenne affecte la résistance).	Indépendant de la pression hydrostatique (pression moyenne).	Indépendant de la pression hydrostatique.



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Critère de Mohr-Coulomb

Le **critère de rupture de Mohr-Coulomb** est utilisé pour les **matériaux dont la rupture résulte d'une combinaison de contraintes normales et de cisaillement**, en particulier ceux présentant un **comportement cohésif ou frictionnel**.

Applications typiques:

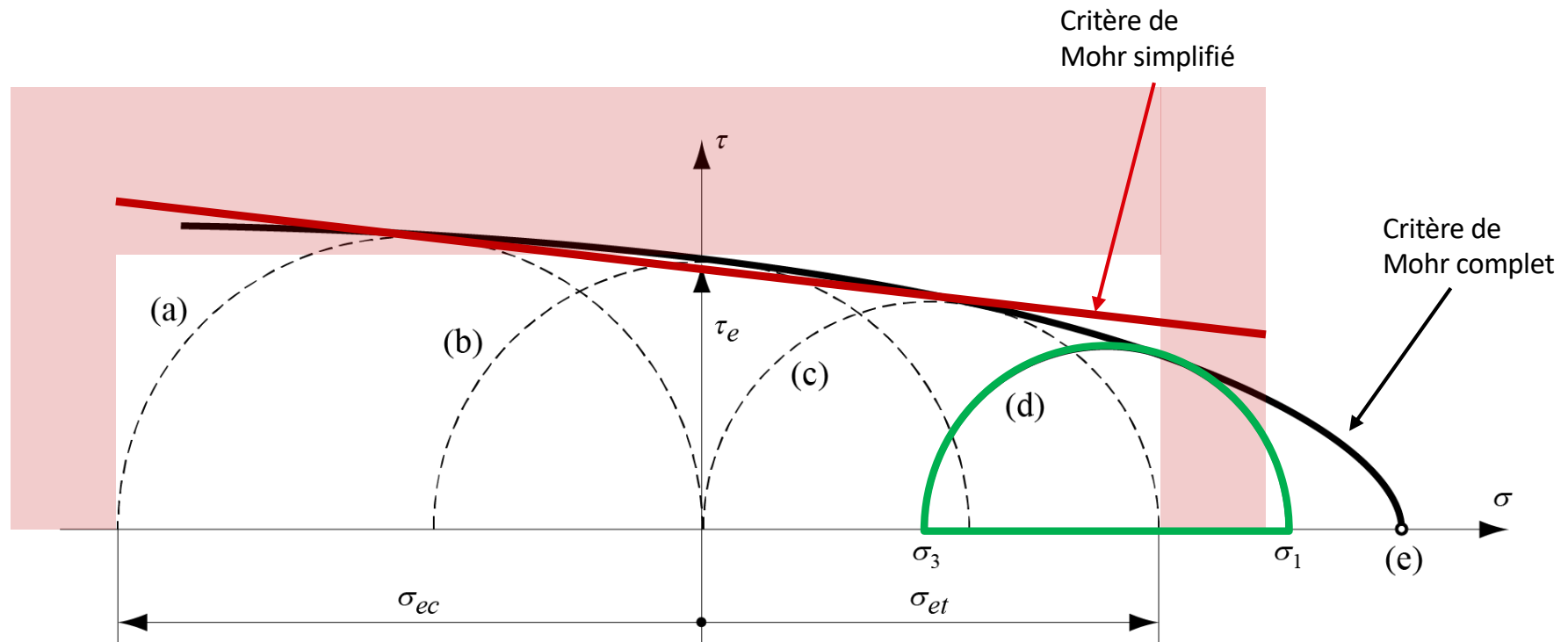
- **Sols et roches** (génie géotechnique)
- **Béton et maçonnerie** (matériaux fragiles-cohésifs)
- **Matériaux granulaires**

Ce modèle prédit des **résistances différentes** en **traction** et en **compression**. Il étend le cercle de Mohr en considérant à la fois la contrainte normale et la contrainte de cisaillement agissant sur le plan de rupture.

La rupture se produit lorsque la **contrainte de cisaillement τ** sur un plan atteint une valeur critique dépendant de la **contrainte normale (σ)** : $\tau = c + \sigma \tan(\phi)$

- c = cohésion (résistance au cisaillement pour $\sigma = 0$)
- ϕ = angle de frottement interne du matériau

Critère de Mohr-Coulomb : La rupture de l'équilibre élastique se produit quand le plus grand des cercles de Mohr, de diamètre $(\sigma_1 - \sigma_3)$, devient tangent à une courbe du plan (σ, τ) , appelée courbe intrinsèque du matériau.



(a) compression simple ;

(b) cisaillement pur ;

(c) traction simple ;

(d) état quelconque ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

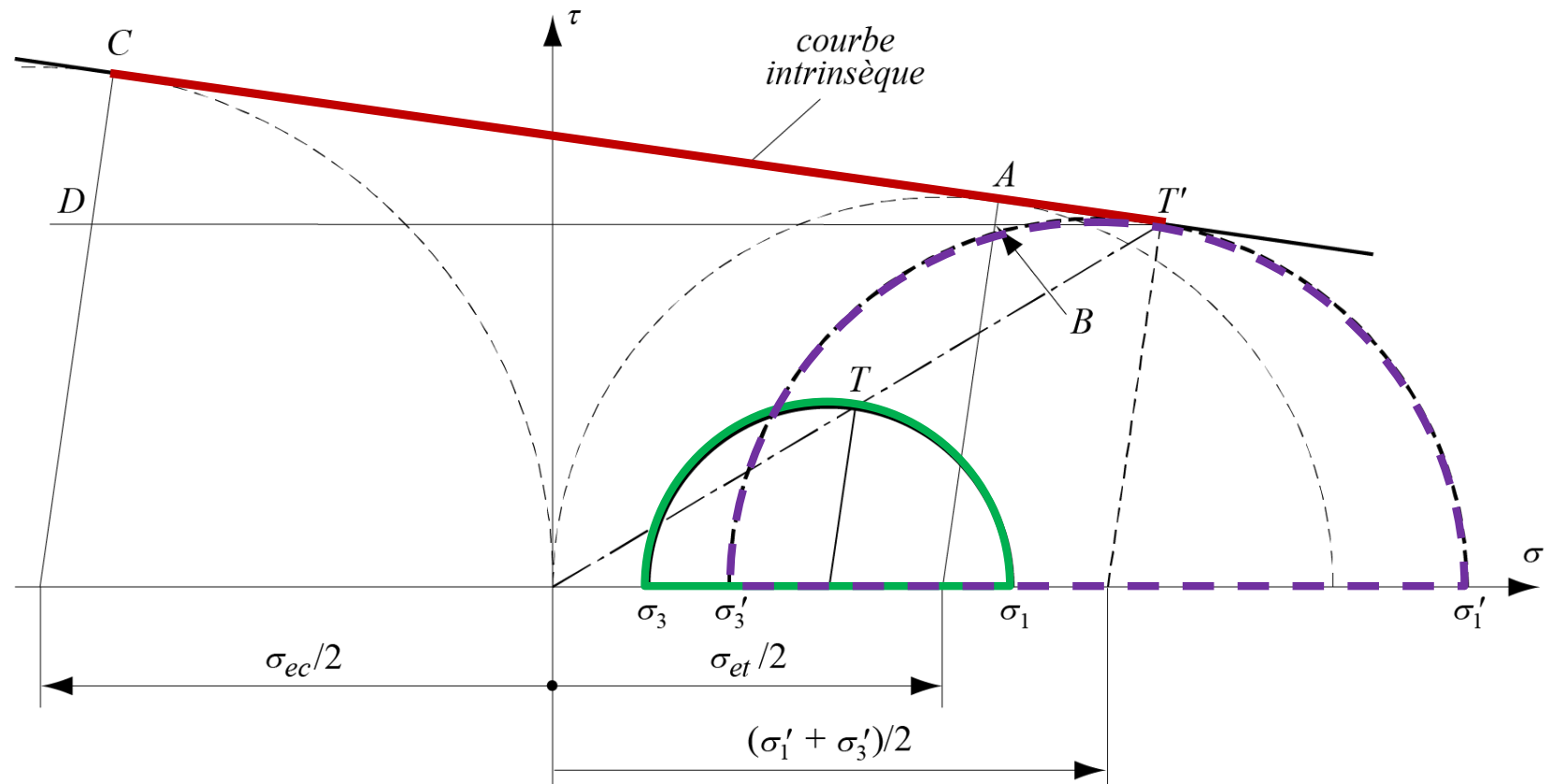
(e) tractions égales dans les trois directions ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p_0$). Point impossible

Critère de Mohr-Coulomb

1. Dans sa partie centrale – constituant la portion la plus utile de la courbe –, le critère peut être remplacée sans erreur appréciable par une droite tangente aux cercles correspondant à la traction simple et à la compression simple.

2. Coefficient de sécurité n

- $\sigma'_1 = n\sigma_1$
- $\sigma'_3 = n\sigma_3$

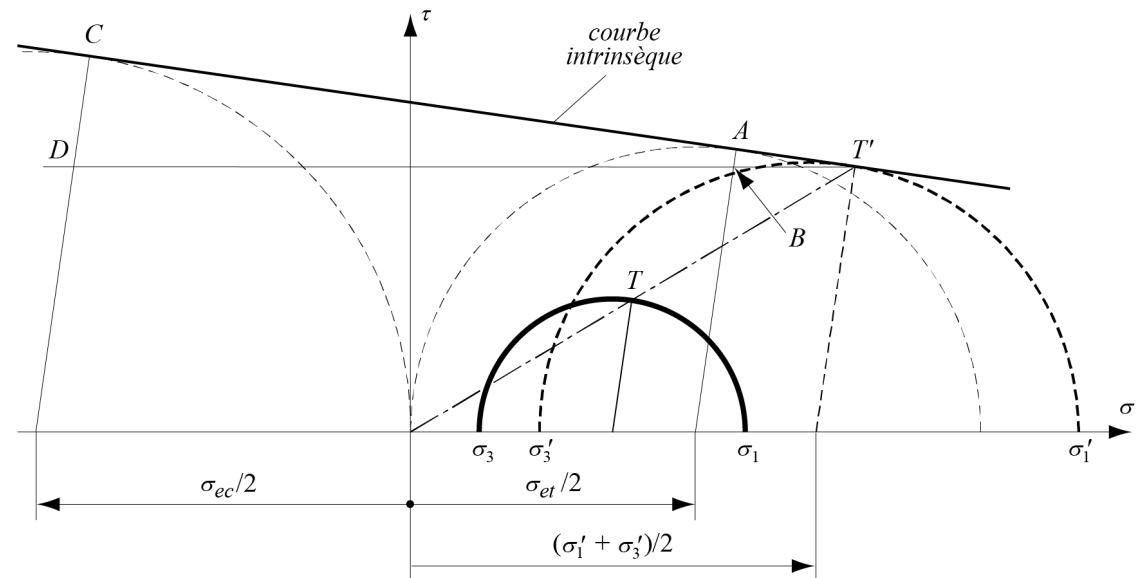


Par le théorème de Thalès

- $\frac{AB}{CD} = \frac{BT'}{DT'}$

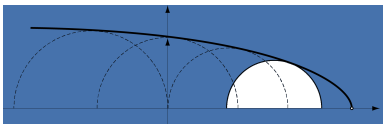
Avec

- $AB = \frac{1}{2}\sigma_{et} - \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3)$
- $CD = \frac{1}{2}\sigma_{ec} - \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3)$
- $BT' = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3) - \frac{1}{2}\sigma_{et}$
- $DT' = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3) + \frac{1}{2}\sigma_{ec}$



On trouve

- $\sigma_{et}\sigma_{ec} = \sigma_{ec}\sigma'_1 - \sigma_{et}\sigma'_3 = n(\sigma_{ec}\sigma_1 - \sigma_{et}\sigma_3)$



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Critère de Mohr-Coulomb

le coefficient de sécurité n selon le critère de Mohr-Coulomb:

$$n = \frac{\sigma_{et} \sigma_{ec}}{\sigma_{ec} \sigma_1 - \sigma_{et} \sigma_3} = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}} \sigma_3}$$

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - \alpha \sigma_3}$$

où le facteur $\alpha = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}}$ dénote le rapport entre les limites élastiques à la traction σ_{et} et à la compression σ_{ec}

La **contrainte de comparaison** σ_g est

$$\sigma_g = \frac{\sigma_{et}}{n} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}} \sigma_3 = \sigma_1 - \alpha \sigma_3$$

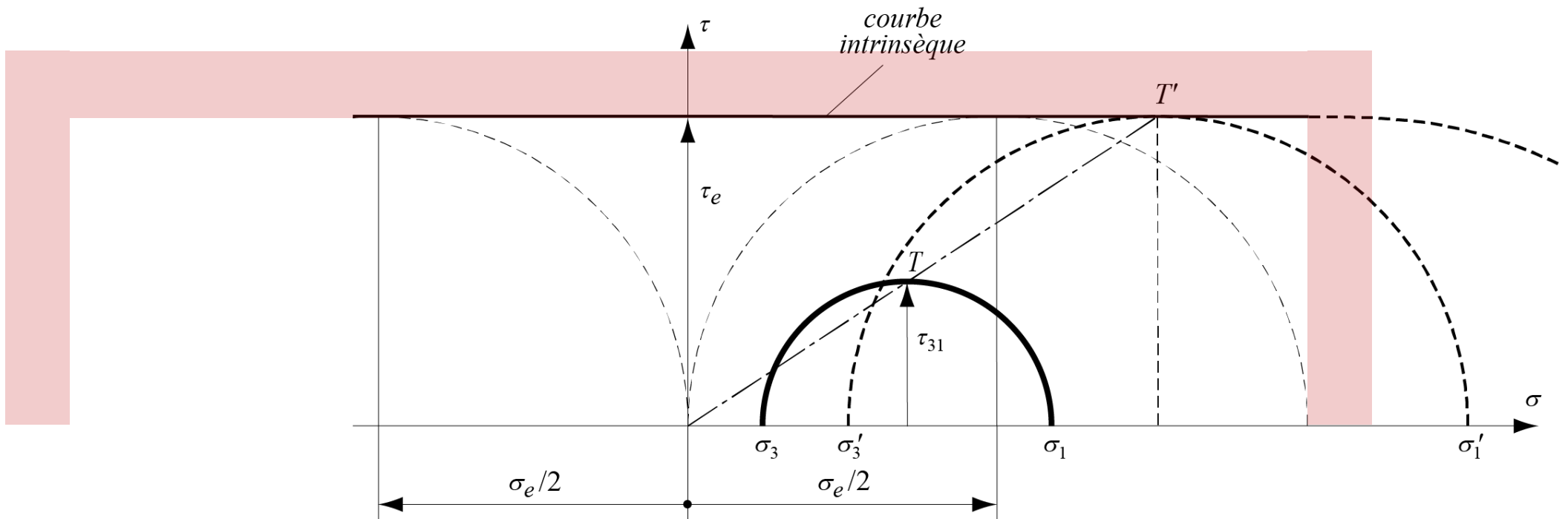
(ce critère implique que la contrainte intermédiaire σ_2 ne joue aucun rôle.)

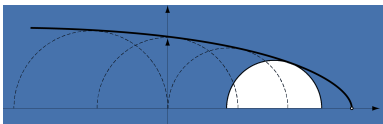
Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Critère de Tresca

Le **critère de Tresca**, nommé aussi critère du plus grand cisaillement; ou critère de la contrainte tangentielle maxima, admet que la rupture survient dès que la plus grande contrainte de cisaillement $\tau_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ dépasse la valeur limite déterminée par l'essai de torsion.

Constituant un cas particulier de la théorie de Mohr-Coulomb, il convient bien pour les **matériaux ductiles (Aluminium)**, mais pas pour les matériaux fragiles (céramique, fonte).





Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Critère de Tresca

Pour les matériaux ductiles, comme la plupart des aciers et des alliages d'aluminium, les contraintes élastiques de traction et de compression sont pratiquement égales:

- $\sigma_{et} = \sigma_{ec} = \sigma_e$

Comme dans ce cas le rapport α entre les limites élastiques à la traction σ_{et} et à la compression σ_{ec} est égal à l'unité, on trouve aisément, le coefficient de sécurité et la contrainte de comparaison valables pour le critère de la contrainte de cisaillement maximale

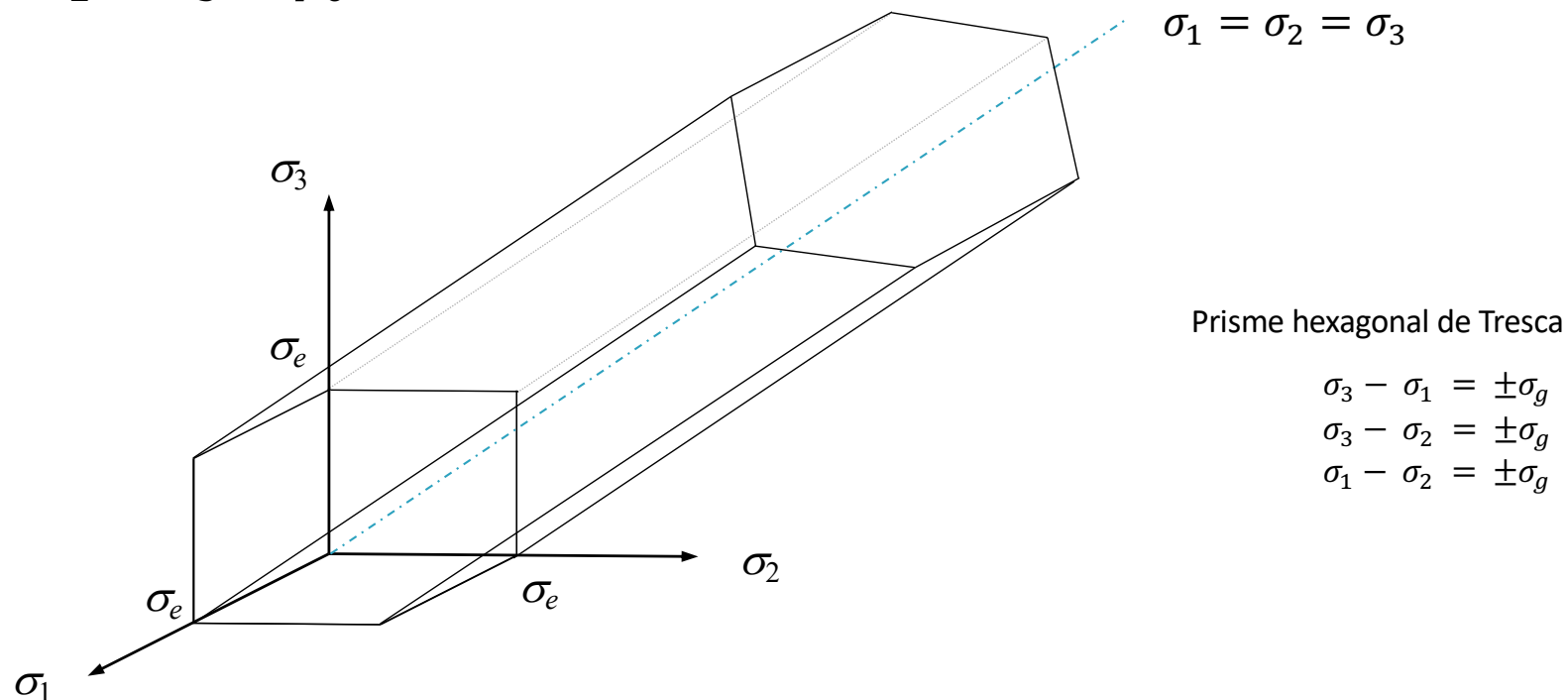
- $n = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3}$ ou $n = \frac{\tau_e}{\tau_{31}}$

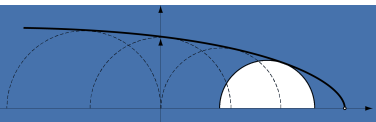
- $\sigma_{g,tresca} = \sigma_1 - \sigma_3$ ou $\sigma_{g,tresca} = 2 \tau_{31}$

- Plus général: $\sigma_{g,tresca} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$

Limites (hypothèses) :

- L'action de la **contrainte de cisaillement maximale** est prépondérante dans le phénomène de rupture de l'équilibre élastique
- La contrainte principale σ_2 ne joue aucun rôle
- Le matériau pourrait supporté une contrainte de traction infinie dans le cas où $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p_0$





Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Exemple

Supposons un matériau ductile dont la résistance à la traction est connue $\sigma_B = 270 \text{ MPa}$.

Les contraintes dans la zone la plus sollicitée de la pièce ont été évaluées ainsi :

$$\Gamma_\sigma = \begin{bmatrix} 200 & 50 & 0 \\ 50 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- Est-ce que le matériau est en dessous de la limite élastique?

L'approche la plus simple (slide 17) est d'évaluer la contrainte principale maximale σ_1 ou $|\sigma_3|$ et la comparer à la contrainte critique donnée.

Les contraintes principales peuvent être obtenues en posant que le déterminant de la matrice suivante est nul :

$$\bullet \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_k & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 200 - \sigma_k & 50 & 0 \\ 50 & -100 - \sigma_k & 0 \\ 0 & 0 & 200 - \sigma_k \end{vmatrix} = 0$$

$$\bullet (200 - \sigma_k)(-100 - \sigma_k)(200 - \sigma_k) - 50^2(200 - \sigma_k) = 0$$

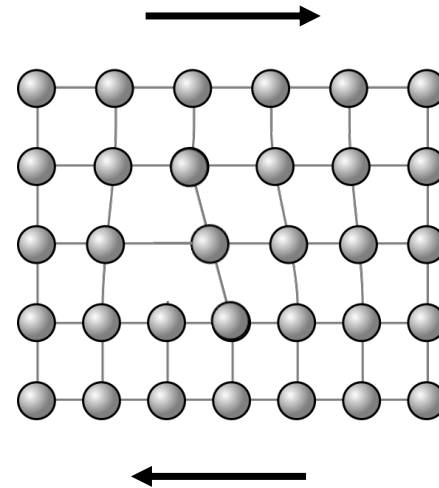
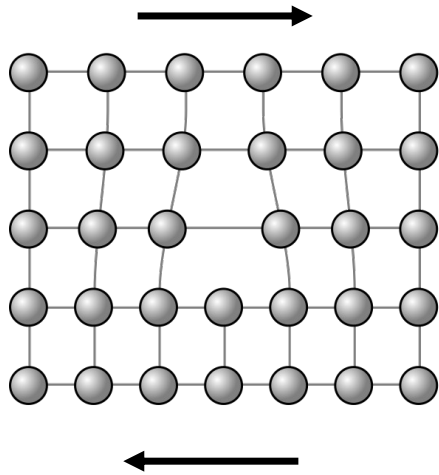
$$\bullet \begin{cases} \sigma_1 = 208 \\ \sigma_2 = 200 \\ \sigma_3 = -108 \end{cases}$$

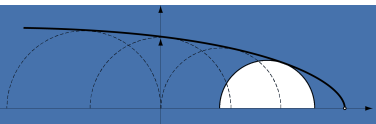
Tous plus petits que 270 MPa

Exemple

Puisqu'aucune de ces contraintes n'atteint la valeur critique $\sigma_B = 270$ MPa on est porté à croire que l'écoulement ne se produit pas, ce qui est inexacte.

Voir les slides précédents sur le Mécanisme d'écoulement (plastification) des matériaux **ductiles** due au mouvement relatif des plans d'atomes due aux dislocations qui se déplacent.





Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Exemple

Connaissant les contraintes principales :

- $$\begin{cases} \sigma_1 = 208 \\ \sigma_2 = 200 \\ \sigma_3 = -108 \end{cases}$$

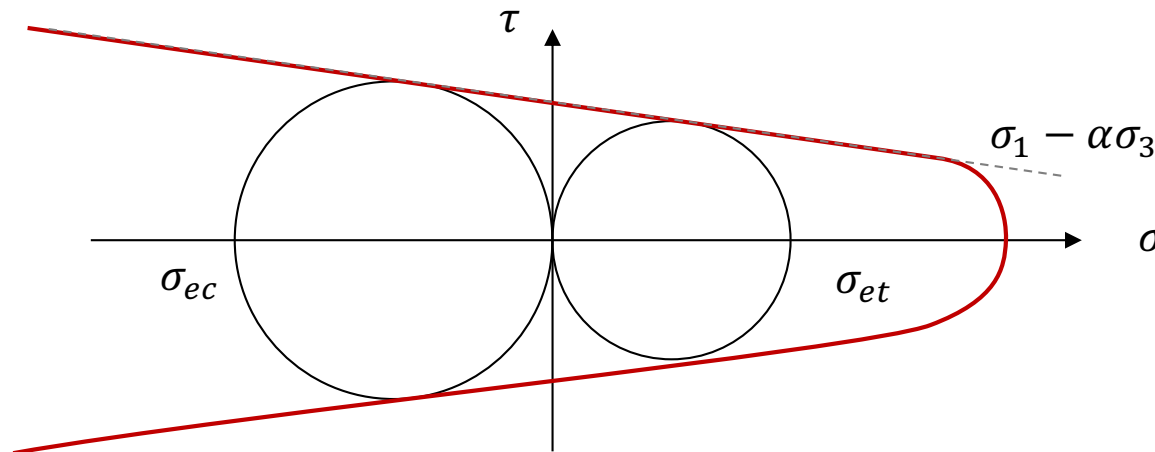
On peut calculer la contrainte équivalente de Tresca (critère du plus grand cisaillement).

- $$\sigma_g = \sigma_1 - \sigma_3 = 208 + 108 = 316 \text{ MPa} > 270 \text{ MPa}$$

donc défaillance pour un matériau ductile...

Dans le cas d'un matériau **fragile**, c'est à Griffith que l'on doit l'explication de leur faible résistance à la traction. Les matériaux réels renfermant un **grand nombre de microfissures qui donnent lieu à des concentrations de contrainte élevées**. Ces dernières s'ouvrent et s'allongent sous l'effet d'un champ de contrainte de traction. La rupture finale se produit lorsque les fissures s'agrandissent au point de devenir instable (inversement la compression entraîne la fermeture des microfissures).

Le critère de Mohr-Coulomb prend mieux en compte ce comportement pour les matériaux fragiles. La rupture apparaît dès lors que l'on ne se trouve plus à l'intérieur de l'enveloppe formée des tangentes aux deux cercles de Mohr limites.

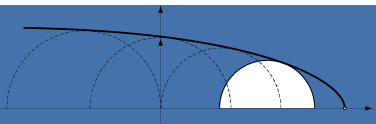


Connaissant les contraintes principales :

- $$\begin{cases} \sigma_1 = 208 \\ \sigma_2 = 200 \\ \sigma_3 = -108 \end{cases}$$

- $$\sigma_g = \sigma_1 - \alpha\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{270}{2\sigma_B}\sigma_3 = 208 + \frac{1}{2}108 = 262 < 270 \text{ MPa}$$

Tout juste OK pour matériau fragile (peut-être...)



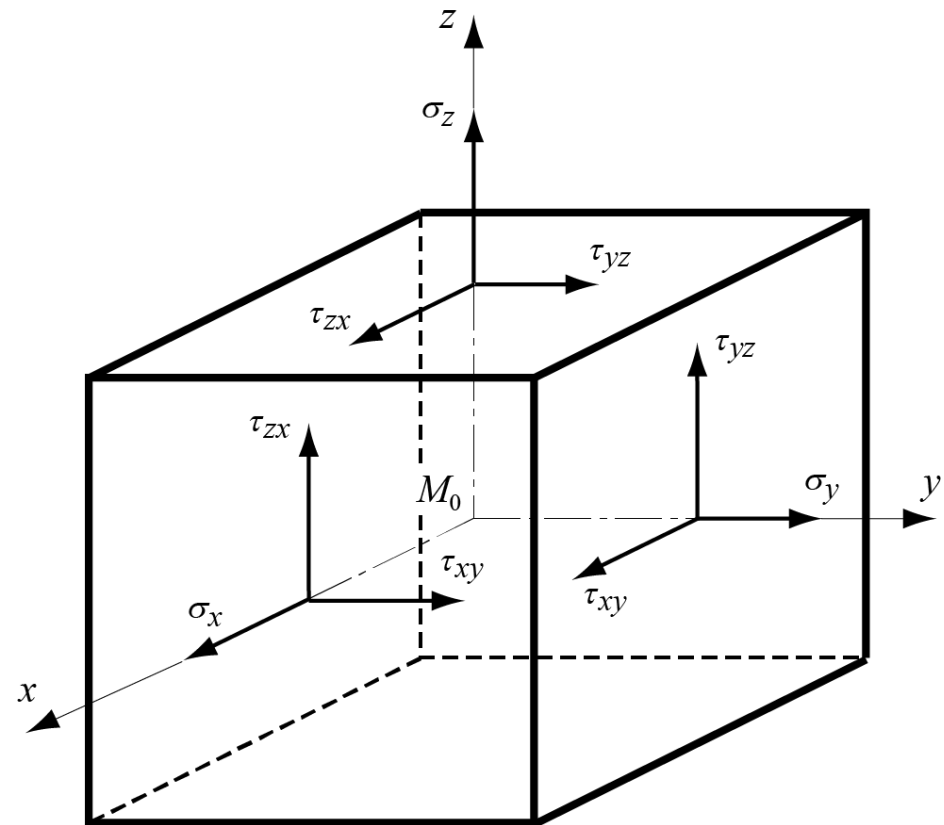
Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

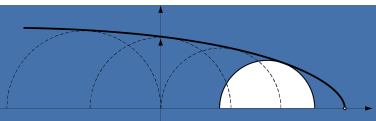
Critère de von Mises

Le critère dit de von Mises, ou critère du plus grand travail de *distorsion*, suppose que la rupture est due à la part de l'énergie de déformation provoquée par les seules déformations angulaires, et non à l'énergie pour un changement de volume.

Le critère de von Mises peut ainsi s'énoncer comme suit :

- i) *L'énergie fournie pour augmenter ou diminuer le volume initial ne joue aucun rôle dans la rupture de l'équilibre élastique.*
- ii) *Seule l'énergie fournie pour déformer le volume entrant en ligne de compte.*

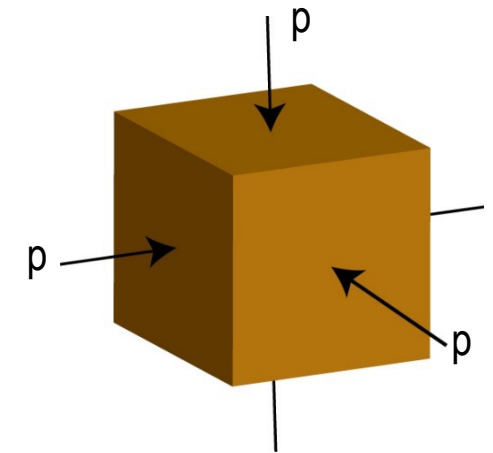




- La matrice de contrainte peut être séparée en deux:
 - Matrice de contrainte hydrostatique (ou volumétrique): *change le volume* de l'objet
 - Matrice de Distorsion: *déforme* l'objet

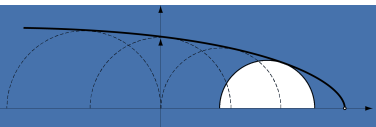
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}}_{\text{Partie hydrostatique}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{bmatrix}}_{\text{Partie "Deviatoric"}}$$

Critère de von Mises



$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$$

- Calculons la densité d'énergie de déformation $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d + \mathbf{u}_p$ afin d'y isoler la partie \mathbf{u}_d due à la distorsion.



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Critère de von Mises

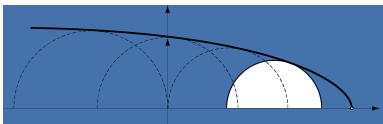
Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la densité d'énergie ne dépend que de l'état final de déformation.

En généralisant l'expression de la densité d'énergie de déformation aux trois dimensions, on peut écrire la densité d'énergie pour un état de contrainte de type tridimensionnel sous la forme suivante:

- $$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

Rappelons que les allongements relatifs et les angles de glissement sont donnés par

- $$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$
- $$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$
- $$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

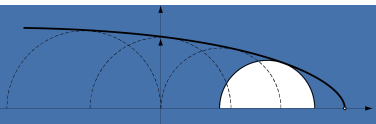
Critère de von Mises

En introduisant les allongements relatifs et les angles de glissement dans l'expression de la densité d'énergie on a :

- $$u = \frac{1}{2E} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) \right) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

Si les contraintes principales sont connues, la densité d'énergie prend la forme simplifiée ci-après

- $$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Critère de von Mises

L'état de contrainte peut être considéré comme la superposition d'une pression hydrostatique p et de contraintes σ'_x , σ'_y et σ'_z provoquant seulement la distorsion

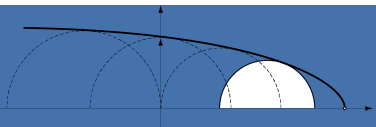
- $$\sigma_x = p + \sigma'_x \qquad \sigma_y = p + \sigma'_y \qquad \sigma_z = p + \sigma'_z$$

Les contraintes σ'_x , σ'_y et σ'_z n'entraînant aucun changement de volume, leur somme est nécessairement nulle. On trouve donc, en additionnant ces relations

- $$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

La densité d'énergie de déformation correspondant à la variation de volume est égale au travail des trois contraintes p agissant selon les trois axes M_0x , M_0y et M_0z

- $$\begin{aligned} u_p &= 3 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_p p \right) = 3 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{E} (1 - 2\mu) p p \right) = \frac{3}{2E} (1 - 2\mu) p^2 \\ &= \frac{1}{6E} (1 - 2\mu) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \end{aligned}$$



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Critère de von Mises

Pour calculer la **densité d'énergie de distorsion** u_d cherchée, il suffit de soustraire la densité d'énergie correspondant à la seule variation de volume u_p de la densité d'énergie totale u

- $u_d = u - u_p$

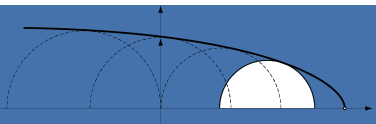
Avec

- $u = \frac{1}{2E} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) \right) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$

- $u_p = \frac{1}{6E} (1 - 2\mu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$

On trouve

- $u_d = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

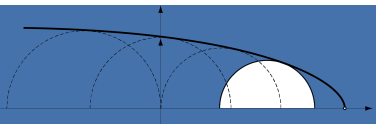
Critère de von Mises

En remplaçant le module de glissement $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

- $$u_d = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]$$

Si les contraintes principales sont connues, l'expression se simplifie comme suit

- $$u_d = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$



Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Critère de von Mises

Dans l'essai de traction simple, la contrainte de comparaison $\sigma_g = \sigma_1$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. La relation précédente devient alors

- $$u_d = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_1^2 = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_g^2$$

La contrainte de comparaison de l'état de contrainte considéré se détermine finalement par égalisation des relations précédentes

- $$\frac{1+\mu}{3E} \sigma_g^2 = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

Et donc la contrainte de von Mises vaut:

- $$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

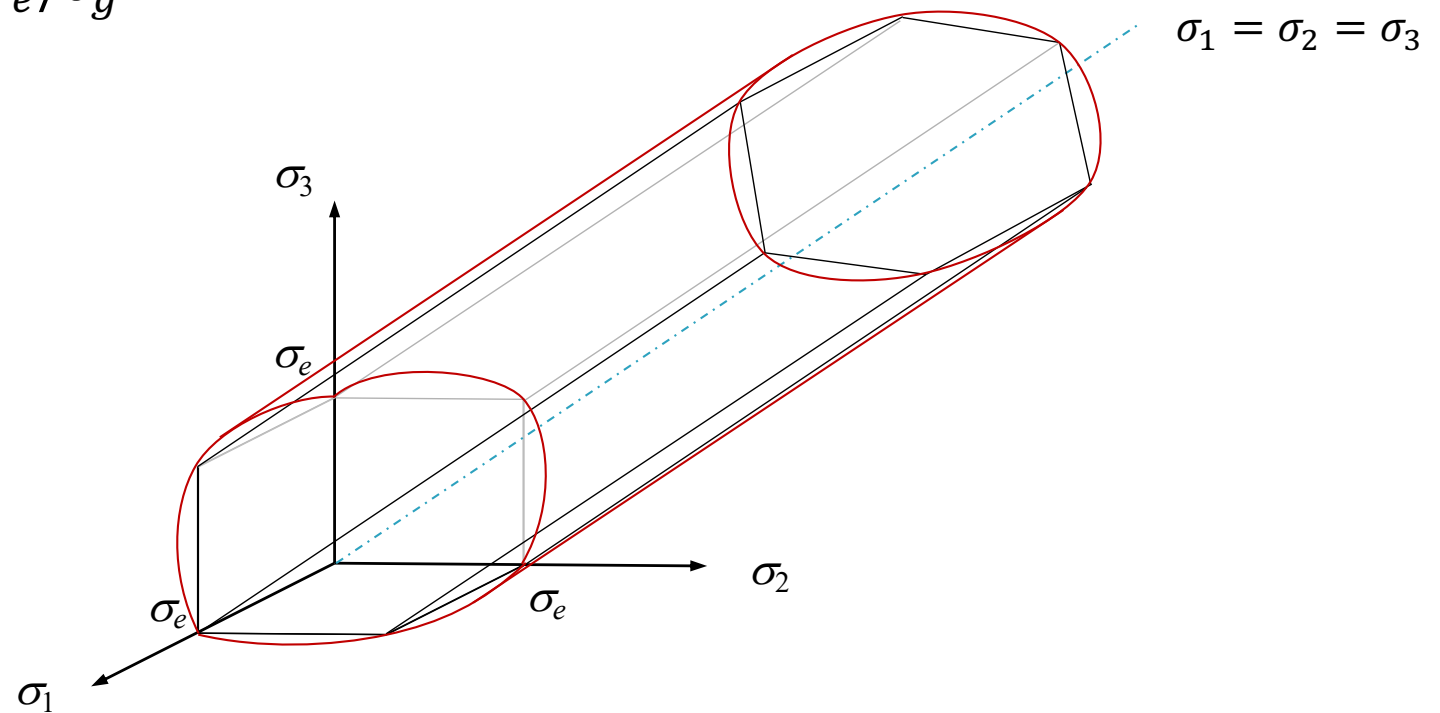
- $$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

- $$\sigma_g = \sqrt{2} \sqrt{(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)} \quad \text{car par exemple } \tau_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Contrainte équivalente

- $$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Facteur de sécurité: $n = \sigma_e / \sigma_g$

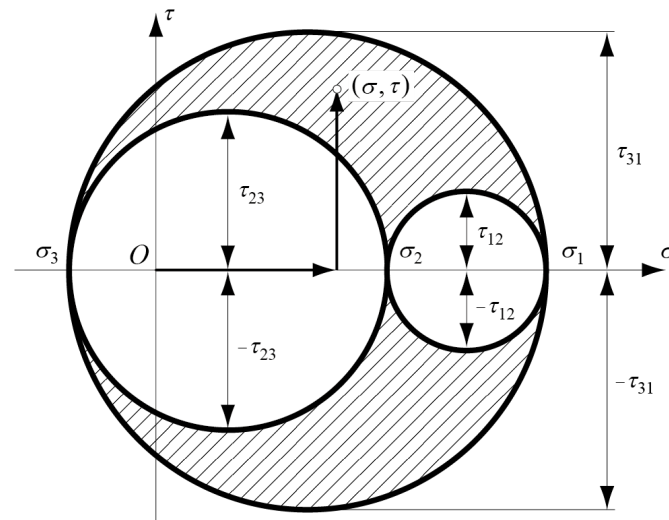


Cylindre de von Mises

Contraint équivalente

- $$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Cercle de Mohr pour exprimer les contraintes de cisaillement max



D'où par exemple pour τ_{13}

- $$\tau_{13} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

- $$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)} = \sqrt{2} \sqrt{(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)}$$

Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Problème 15.1 et 15.2

La force de contact d'un engrenage, réduite à l'axe neutre de l'arbre porteur, donne lieu à une force répartie verticale q et un moment de torsion M_t

Pour l'arbre, calculer i) au moyen du critère de Tresca puis ii) de von Mises, le coefficient de sécurité n aux points A et B de la section C .

Données numériques:

$$q = 400 \text{ kN/m}$$

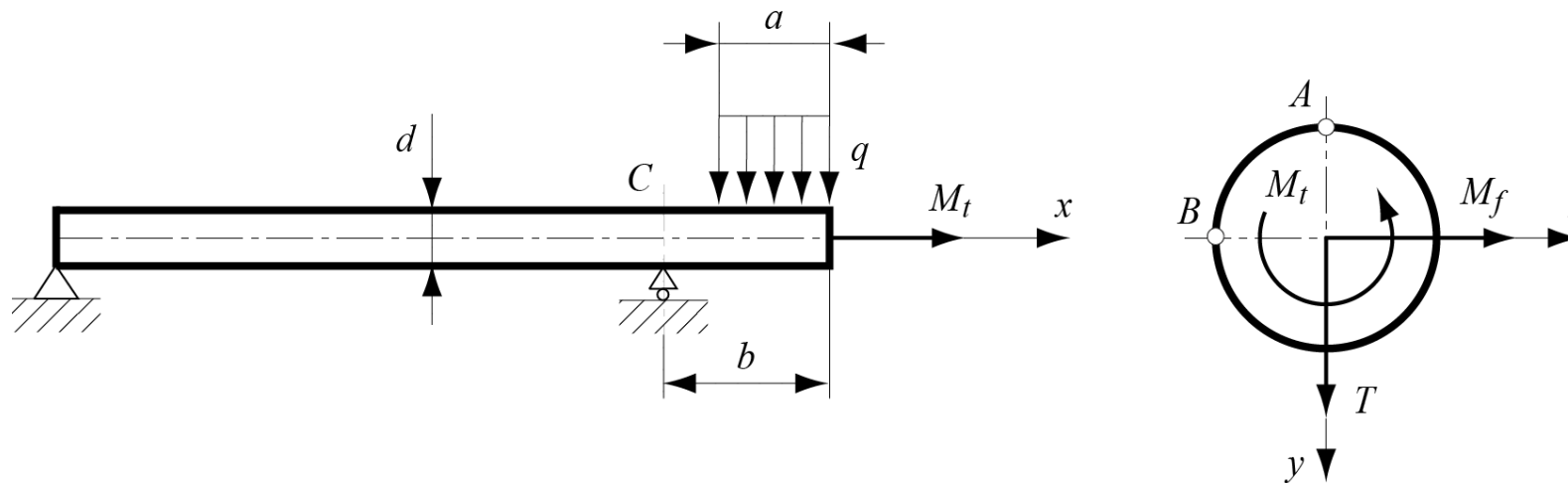
$$d = 20 \text{ mm}$$

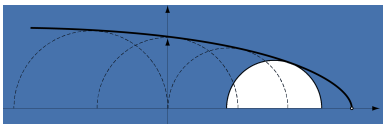
$$b = 30 \text{ mm}$$

$$M_t = 80 \text{ Nm}$$

$$a = 20 \text{ mm}$$

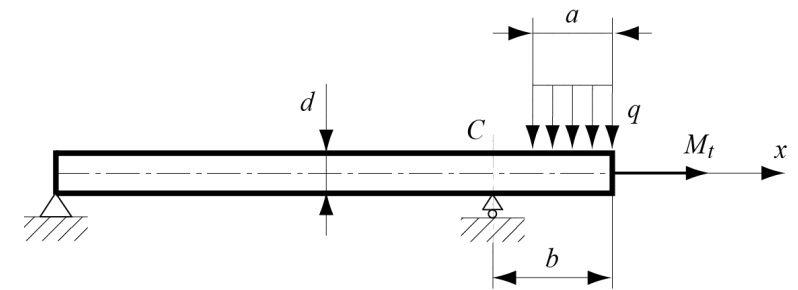
$$\sigma_e = 280 \text{ MPa}$$

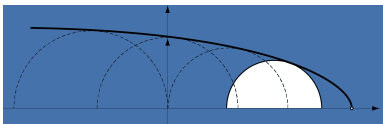




Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

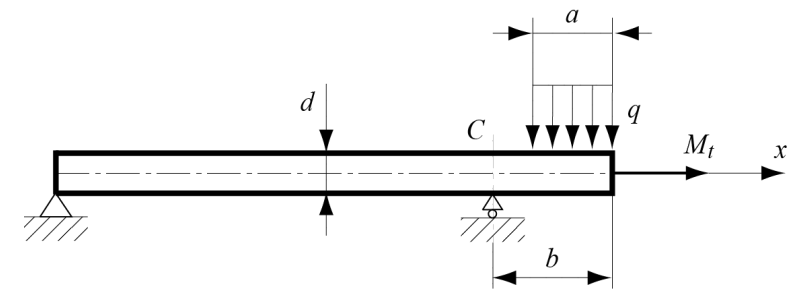
Problème 15.1 et 15.2

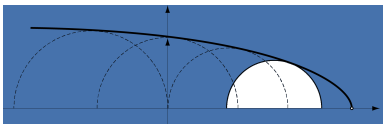




Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

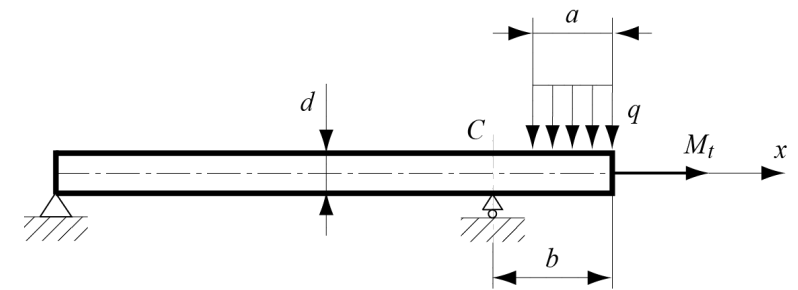
Problème 15.1 et 15.2





Ch15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Problème 15.1 et 15.2



Merci pour vote attention